MATEMATICA IN RELAX – IMPARIAMO A CONTARE

PREMESSA

1. Einstein, gli idioti e la tecnologia

Tecnologia

7 aprile 2013

Sul Qn (il Resto del Carlino, la Nazione, il Giorno) di oggi, c'è una mia intervista a Giorgio Israel, professore di Matematiche complementari all'università La Sapienza di Roma, autore del volume "Pensare in matematica'' (ed. Zanichelli, pag. 544, euro 46): un crocevia tra saggio filosofico, storia della matematica e manuale didattico per chi poi dovrà insegnare questa materia che di solito risulta così poco simpatica.

Riporto qui la parte in cui abbiamo parlato di tecnologia:

Oggi i bambini usano computer e tablet prima di imparare a contare. E quando arrivano ai numeri 'sfogliano' i libri come se le pagine fossero uno schermo.

"Su questo serve una riflessione profonda: la tecnologia è uno strumento prezioso di cui però non bisogna abusare, soprattutto coi bambini. Non si risolvono i problemi, non solo quelli matematici, pasticciando con gli schermi. I concetti vanno elaborati, non si tirano fuori con un clic. E questo va insegnato sopratutto ai bambini e ai ragazzi: elaborare ragionamenti in modo autonomo, riflettendo con la propria testa e non cercare ogni soluzione sul computer".

E' una affermazione in controtendenza rispetto a chi invoca una maggiore informatizzazione della nostra scuola.

"Non sono solo: qualche tempo fa il New York Times ha raccontato che i manager della Silicon Valley scelgono per i loro figli scuole con lavagne e gessetti, carta e pennarelli, per dare ai bambini la possibilità di imparare a pensare, a elaborare idee e ragionamenti".

Qual è la misura giusta nell'utilizzo della tecnologia, nella didattica e non solo?

"Mi permetta di citare Einstein: 'Temo il giorno in cui la tecnologia andrà oltre la nostra umanità: il mondo sarà popolato allora da una generazione di idioti' ".

Confesso, non conoscevo quella frase di Eistein, ma credo che d'ora in poi la userò spesso.

2. Cosa sta succedendo in questi giorni con la Mini-IMU (giornalisti: conti astronomici, esempi fuorvianti con il luogo)

3. Forse dovremmo accontentarci che la maggior parte degli studenti conosca l'aritmetica e un poco di geometria (che è in fondo quello che fanno gli umanisti, che si accontentano che la maggior parte degli studenti sappia leggere e scrivere, se non proprio capire tutto)

Gli esercizi che seguono possono essere utili per imparare a contare e a ragionare acquisendo un metodo che può essere utile in svariate situazioni della vita (Sherlock Holmes soleva dire "Quando tutto il resto è stato scartato, l'unica cosa possibile, per quanto improbabile, è quella vera"

ESERCIZIO 1 (LE 3 FIGLIE DEL RE)

Un giorno, il Re chiese al suo giullare: sai dirmi le età delle mie tre figlie? Sappi che ill prodotto delle 3 età è 36 e che la somma è pari al numero di finestre del palazzo che hai di fronte". Il giullare replicò: "Sire, ce la posso fare, ma ho bisogno di un piccolo aiuto". Il Re allora aggiunse: "La più grande ha gli occhi azzurri" e il giullare diede la risposta corretta. Quanti anni avevano le figlie del Re?

Obiettivi: Imparare a contare in modo ordinato in quanti modi un numero può essere scomposto in fattori – Legare i concetti di somma e prodotto – Possibilmente, cercare di ricavare (con il metodo visto del conteggio) il numero di permutazioni di n elementi

ESERCIZIO 2 (ANCORA SUL LEGAME FRA SOMMA E PRODOTTO – SCOMPOSIZIONE IN FATTORI PRIMI)

Nel corso di un'esplorazione su un'isola, tu e un tuo amico siete stati catturati da una tribù di aborigeni. Le cose si mettono male, ma il Re vi offre una possibilità di salvezza. Il Re ha due figlie e ciascuna di loro ha più di 1 anno. Il Re dice a te che la somma delle due età è 15, mentre comunica al tuo amico, detenuto in un'altra prigione, il prodotto delle due età. Per salvarti la vita devi trovare le età delle figlie del Re. Che fare? Se tu potessi ricevere informazioni dal tuo amico, dovresi solo risolvere un classico sistema "somma e prodotto", ma è esclusa ogni possibilità di comunicazione. Ti stai per rassegnare a una risposta a caso, quando il re cerca di incoraggiarti: "Il tuo amico è salvo, perché ha determinato le due età senza un attimo di esitazione!" Ecco, questa è l'informazione che ti mancava. Perché?

Note:

a) Il quesito è dunque diventato: Trovare due numeri primi che hanno per somma 15.

b) **Se la somma delle due età fosse stata 14 e il tuo amico avesse risposto immediatamente, tu avresti potuto dare la somma con certezza?**

c) Se la somma fosse stata 23, il tuo amico avrebbe potuto rispondere con certezza?

ESERCIZIO 3 (IN QUANTI MODI UN NUMERO NATURALE PUO' ESSERE SCOMPOSTO COME SOMMA DI DUE NUMERI NATURALI?)

L'ambientazione è analoga alla precedente. Il Re ha due figlie, le cui età sono numeri interi positivi. Il Re comunica al tuo amico la somma delle due età, mentre a te dice che la differenza delle due età è 5. Il tuo amico dice che non è in grado di rispondere con sicurezza, poiché è incerto fra 4 possibilità. Ora tocca a te: cosa rispondi?

ESERCIZIO 4 (LEGAME FRA SOMMA E MCD DI DUE NUMERI)

Ci sono 2 prigionieri, M ed S, a ciascuno dei quali viene data, separatamente, una sola informazione: Ad S viene comunicata la somma delle età delle due figlie del Re. Ad M viene comunicato il MCD delle due età. Il Re convoca i prigionieri e promette di liberare chi riesce a determinare le due età. S scuote tristemente la testa: “No, Maestà, non sono in grado di stabilire le età delle tue due figlie. Sono incerto fra ben 5 possibilità”. Sentita questa risposta, M fa qualche calcolo, dopo di che afferma: “Maestà, io conosco le età delle tue figlie”. Infine anche S, udita l'ultima risposta, dice “Ora anch'io so le due età”. Quanti anni hanno le figlie del Re?

Nota: Cogliere l'occasione per far dimostrare il Teorema: n è primo se e solo se comunque lo si scompone nella somma di due interi positivi a e b si ha MCD(a,b)=1.

ESERCIZIO 5 (ANCORA SUL LEGAME FRA SOMMA E MCD DI DUE NUMERI)

E' tutto come prima tranne le prima risposta di S che è la seguente: “No, Maestà, non sono in grado di stabilire le età delle tue due figlie. Sono incerto fra ben 4 possibilità”.

Nota: Stavolta diventa importante sfruttare l'ultima affermazione di S, che a sua volta dichiara di aver determinato le due età:

ESERCIZIO 6 (DIFFICILE)

Un giorno il Re chiese al suo giullare: “Sai dirmi le età delle mie due figlie? Sappi che la somma è pari al numero delle finestre del palazzo che abbiamo di fronte. Il giullare replicò: “Sire, quest'informazione non mi basta, ho bisogno di un aiuto”. Il Re allora aggiunse: “I due numeri che stai cercando non sono primi fra di loro”. Il giullare diede la risposta corretta e poi notò: “Maestà, la vostra figlia maggiore ha la stessa età di mio figlio!” Quanti anni avevano le due figlie del Re?

Nota: dimostrare che fra tutti i numeri interi positivi, solo 4 e 9 godono della proprietà che fra i MCD relativi a due numeri con somma 4 o 9 c’è uno e un solo numero diverso da 1.

ESERCIZIO 7 (COME MASSIMIZZARE IL PRODOTTO CONOSCENDO LA SOMMA)

All’inizio della vostra serata al Casinò disponete di 40 gettoni e 1 Euro. Le regole del gioco sono le seguenti: Puntate un certo numero di gettoni e se vincete moltiplicate il vostro capitale per il numero di gettoni puntati, ma dovete lasciare la vostra puntata. Se perdete, invece, dovete lasciare i gettoni puntati e il vostro capitale rimane invariato. Qual è il massimo capitale con cui potete lasciare il casinò?

Nota: La somma di due numeri è sempre minore del prodotto se la somma è > 5.

ESERCIZIO 8 (I MILLEPIEDI)

I millepiedi adulti impiegano un secondo per togliersi una scarpa, mentre i loro figli ci mettono 2 secondi. Una famiglia di millepiedi è composta da padre, madre e 3 figli. Ognuno può scalzare sé stesso e/o anche un altro membro della famiglia. Chi è scalzo può aiutare gli altri a scalzarsi. Quanto tempo ci metterà la nostra famiglia, al minimo, per togliersi tutte le scarpe?

ESERCIZIO 9 (UNA GRANDE SOMMA, DIFFICILE)

Scrivete tutti i numeri da 1 fino a 2014. Poi cancellate i primi 2 e metete in ultimo la loro somma: Poi cancellate i primi due rimasti e mettete all’ultimo la loro somma. Poi…fino a quando vi resterà un solo numero. Qual è la somma di tutti i numeri che avete scritto?

ESERCIZIO 10: QUANTI BAMBINI? (E’ SULLO STILE DEL PROBLEMA DELLE TRE FIGLIE DEL RE, MA PIU’ ARTICOLATO. IL PROBLEMA E’ STATO PRESENTATO ORIGINARIAMENTE DA LESTER R. FORD NEL 1948)

- “Sento che dei ragazzi giocano nel cortile” disse Jones, uno studente di Matematica, “Sono tutti vostri?”

- “Per l’amor del cielo, no” esclamò il Prof. Smith, l’eminente teorico dei numeri. “I miei figli giocano con degli amici di altre tre famiglie del vicinato, anche se la nostra famiglia è la più numerosa” I Brown hanno un numero inferiore di figli ed i Green ancora inferiore, mentre i Black ne hanno meno di tutti.”

- “Ma in totale quanti bambini ci sono?” chiese Jones.

- “Diciamo così” fece Smith “sono meno di 18 bambini e il prodotto dei numeri dei bambini delle 4 famiglie coincide, guarda caso, con il mio numero di casa che hai visto venendo”.

- James prese un quaderno ed una matita dalla tasca e cominciò a scarabocchiare. Dopo un momento alzò gli occhi e chiese: “Mi occorre un’altra notizia: in casa Black, vi è più di un bambino?”

- Appena Smith rispose, Jones sorrise e disse il numero esatto di bambini di ciascuna famiglia.

Quanti sono i bambini di ciascuna famiglia?

ESERCIZIO 11. (IMPARARE A PESARE)

Abbiamo 10 sacchetti con 10 palline in ogni sacchetto e una bilancia digitale estremamente precisa. Ogni pallina pesa 10 grammi, tranne quelle di un solo sacchetto truccato” le quali pesano 9 grammi ognuna. Come possiamo riconoscere il sacchetto “truccato” con una sola pesata? (Possiamo pesare quante palline vogliamo da ogni sacchetto, l’unico vincolo è effettuare un’unica pesata)

ESERCIZIO 12 (IL CALENDARIO CUBISTA)

Alla fine degli anni Sessanta andava di moda un daario da tavolo in cui il numero del giorno era composto utilizzando due cubi, su ogni faccia dei quali appariva una cifra da 0 a 9. Come facevano i produttori del calendario a disporre le cifre da 0 a 9 nei due cubi in modo che li si potesse combinare pere indicare qualunque giorno del mese, da 01 a 31? La soluzione era unica?

ESERCIZIO 12: LA POPOLAZIONE DI FERTILIA

L’immaginaria nazione di Fertilia è governata da un sultano con poteri assoluti. Il sultano vorrebbe aumentare la percentuale di donne nella popolazione per rimpinguare gli harem; promulga così una legge che vieta ai sudditi di procreare ulteriormente dopo aver avuto un figlio maschio. Il suo ragionamento è il seguente: “Ci saranno famiglie con un solo maschio, famiglie con una femmina e un maschio, con due femmine e un maschio, e così via; e magari ci saranno anche famiglie con sole femmine. Una situazione perfetta!”

Il ragionamento è corretto? NO. Prendiamo infatti tutte le coppie con figli e consideriamo il loro **primogenito:** in media, saranno metà maschi e metà femmine. Passando ai secondogeniti delle coppie che hanno almeno due figli, di nuovo metà di essi sarà maschio e l’altra metà femmina: il fatto che il loro *primo* loro figlio sia una femmina è irrilevante, dato che è già stato considerato nel gruppo precedente, e lo stesso per i terzogeniti e oltre. Si capisce che in media il numero di maschi e femmine sarà lo stesso. **Non tanto intuitivo, vero?**

Supponete ora che le famiglie di Fertilia continuino ad avere figli fino a che non nasca loro un maschio. Quanti figli avrà allora in media una famiglia?

SOLUZIONE 1 (facile ed intuitiva).

Abbiamo visto che in media ci saranno tanti maschi quante femmine. Ma tutte le famiglie hanno esattamente un maschio, quindi in media avranno anche una femmina, per un totale di due figli.

SOLUZIONE 2 (analitica ma meno facile)

Siano n le famiglie di Fertilia. Allora la media dei figli è data da 1/n[il numero di famiglie con un solo figlio + il numero di famiglie con due figli + il numero di famiglie con tre figli + il numero di famiglie con 4 figli +…] = (1x1/2) + ($2x1/2^2$) +($3x1/2^3$) +…=$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k$, con x = ½.

Sfruttando la convergenza uniforme di questa serie di potenze e della serie delle sue primitive, si ottiene che essa è uguale a 2.

Nota: Quando si parla di probabilità bisogna infine fare molta attenzione alla formulazione esatta del problema. Se la domanda fosse stata, ad esempio, “Qual è la tipologia di famiglia più numerosa?” la risposta sarebbe “Quella con un figlio solo” che si ha nella metà dei casi.

ESERCIZIO 13 (UN RISULTATO POCO INTUITIVO: DUE VITTORIE DI FILA)

Un adolescente chiede a suo padre un po’ di soldi per andare in discoteca con gli amici durante un fine settimana. Il padre ci pensa un attimo e poi dice: “Facciamo così: mancano tre giorni a Sabato. Tua madre ed io ci alterniamo a giocare a scacchi con te, una partita per sera; se ne vinci almeno due consecutive, ti darò i soldi che mi hai chiesto; altrimenti preparati come volontario per le Grandi Pulizie di casa”. Non avendo molta scelta, il figlio accetta. Poi ci pensa e chiede al padre: “Ma inizierò a giocare con te o con la mamma?” Il padre, sorridendo, risponde “Scegli pure chi preferisci”. Il figlio sa che sua madre gioca a scacchi meglio di suo padre. Cosa gli conviene fare?

SOLUZIONE 1 (INTUITIVA MA SBAGLIATA)

Conviene scegliere di giocare due volte con il padre, visto che è meno forte della madre, dunque prima sera padre, seconda madre e terza padre.

SOLUZIONE 2 (CONTROINTUITIVA MA CORRETTA)

Con riferimento al ragazzo, indicando con P una partita persa e con V una partita vinta, i possibili risultati sono:

1. **PPP**
2. **VPP**
3. **PVP**
4. **PPV**
5. **PVV**
6. **VPV**
7. **VVP**
8. **VVV.**

I casi favorevoli al ragazzo sono il 5, il 7 e l'8. In tutti e tre i casi è costretto a vincere la seconda partita. Dunque gli conviene giocare la seconda con il padre, più debole e giocare la prima e la terza con sua madre, che è più forte.

ESERCIZIO 14 (DETENUTI NUMERATI. LO TROVO DI UNA BELLEZZA E DI UNA INTELLIGENZA STRAORDINARIA)

In una nazione sudamericana ai tempi di una feroce dittatura, dopo la decisione della Junta "Svuotiamo le carceri in un modo o nell'altro" sono stai sorteggiati 10 (presto ex, qualunque sia il risultato) detenuti e si è dipinto loro in fronte un numero da 0 a 9. I numerei non sono necessariamente tutti diversi: potrebbero ad esempio esserci nove 3 ed un 2. La prova cui vengono sottoposti è collaborativi: è sufficiente che un solo detenuti indovini il numero sulla propria fronte affinché vengano tutti liberati; altrimenti il becchino dovrà fare gli straordinari. I detenuti possono accordarsi prima della prova su una strategia da seguire, ma non potranno più comunicare a partire dal momento in cui ciascuno vedrà i numeri sulla fronte degli altri. Qual è la loro strategia migliore?

Nota: Un piccolo aiuto: ci sono 10 possibilità diverse per il numero sulla fronte di ciascun prigioniero. I prigionieri devono pertanto dare dieci risposte tutte diverse in modo da averee la possibilità che una sia quella corretta. Che cosa possono sapere i prigionieri riguardo alla somma di tutti i numeri, compreso il proprio?

ESERCIZIO 15.

Costruiamo una successione nel modo seguente:

Il primo numero è 2, il secondo è 3, il terzo è il prodotto di 2 e 3, cioè 6, poi il prodotto di 3 per 6, e scriviamo il quarto numero 1 e il quinto 8 e così via

2 _3_6_1_8_6_8_4_8_4_8 _3_2_...

Mostrare che i numeri 0, 5, 7 e 9 non compaiono nella successione.

Soluzione.

PASSO 1. Nella successione non possono apparire due cifre dispari x e y consecutive.
DIM. Ciò infatti può accadere solo quando uno dei due numeri, x, 10x + y è il prodotto di due numeri consecutivi DISPARI a e b della successione i quali precedono sia x che y. In ogni caso, dunque, se x e y sono termini consecutivi dispari, vi sono altri termini antecedenti a e b che sono anch'essi consecutivi e dispari. Riapplicando più volte questa procedura ne seguirà che almeno due delle tre cifre iniziali devono essere dispari e questo non è vero.

PASSO 2. La cifra 9 non può comparire mai.

DIM. Infatti il 9 si può formare come prodotto di due cifre solo come 1x9 o 3x3 (ma per il Passo 1 questo non è possibile); oppure il 9 può figurare in un prodotto a due cifre di numeri di una sola cifra, ma nemmeno questo può verificarsi: infatti il 9 non può essere la cifra delle decine (il prodotto di due numeri a una cifra è minore di 90) né la cifra delle unità (perchè allora i due fattori del prodotto sarebbero entrambi dispari.

PASSO 3. La cifra 7 non può comparire.

DIM. Infatti gli unici numeri di due cifre in cui compare il 7 e che siano prodotti di numeri a una sola cifra sono 72 = 8x9 e 27 = 3x9 ma abbiamo già visto che il 9 non compare nella successione.

PASSO 4. La cifra 5 non può comparire.

DIM. Gli unici numeri pari, a due cifre, che siano il prodotto di numeri a una cifra, e che contengono il 5 sono: 54 = 6x9 e 56 = 7x8. Entrambi non possono esserci per i passi 2 e 3.

PASSO 5. La cifra 0 non può comparire.

DIM. Segue subito dal fatto che 5 non compare.